第7章

演習 7.1

$f(x)$は$a, b(a\neq b)$を含むある区間Iでn回微分可能とする。
このとき、
$$
\frac{1}{(n-1)!}\int_a^b (b-x)^{n-1}f^{(n)}(x)dx
=\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n \qquad (a<x<b)
$$
を満たす$c\in (a,b)$が存在する。

(証明)
$(b-x)^{n-1}>0$に注意すれば、積分の平均値定理より
$$
\int_a^b (b-x)^{n-1}f^{(n)}(x)dx
=f^{(n)}(c)\int_a^b (b-x)^{n-1}dx
=f^{(n)}(c)\frac{-1}{n}\Bigl[(b-x)^n\Bigr]_a^b
=\frac{1}{n}f^{(n)}(c)(b-a)^n
$$
を満たす$c\in (a,b)$が存在する。よって、
$$
\frac{1}{(n-1)!}\int_a^b (b-x)^{n-1}f^{(n)}(x)dx
=\frac{1}{n!}f^{(n)}(c)(b-a)^n.
$$

演習 7.2

次の関数を積分せよ。
\begin{center}
(1) $\displaystyle \int_1^2 \frac{\log x}{x}dx$
$\qquad$
(2) $\displaystyle \int_0^\pi \sin^n x dx$
\end{center}
(解答)

(1) $\displaystyle I=\int_1^2\frac{\log x}{x}dx$とおくと、
$$
I=\Bigl[\log x \cdot \log x \Bigr]_1^2 - \int_1^2 \frac{\log x}{x}dx
=(\log 2)^2-I
$$
なので、$\displaystyle I=\frac{(\log 2)^2}{2}$である。

(2)
$\displaystyle I_n = \int_0^\pi \sin^n x dx$とおくと、
\begin{eqnarray*}
I_n &=& \int_0^\pi \sin^{n-1}x\cdot \sin x dx
=\Bigl[-\sin^{n-1}x\cdot \cos x \Bigr]_0^\pi
+\int_0^\pi (n-1)\sin^{n-2}x\cdot \cos^2 x dx\\
&=&(n-1)\int_0^\pi \sin^{n-2}x(1-\sin^2 x)dx
=(n-1)(I_{n-2}-I_n)
\end{eqnarray*}
なので、

$$
I_n = \frac{n-1}{n}I_{n-2} \qquad (n\ge 2).
$$
nが偶数のとき、
$\displaystyle I_0 = \int_0^\pi 1 dx = \pi$なので、
$$
I_n = \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots \frac{3}{4}
\frac{1}{2}I_0
=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots \frac{3}{4}
\frac{1}{2}\pi.
$$
また、nが奇数のとき、
$\displaystyle I_1=\int_0^\pi \sin xdx=
\Bigl[-\cos x\Bigr]_0^\pi=2
$
なので、
$$
I_n = \frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{4}{5}\frac{2}{3}I_1
=2\frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{4}{5}\frac{2}{3}.
$$