よくわかる数値解析演習ー誤答例・評価基準つきー
正誤表・追記事項

皆本晃弥

平成 20 年 2 月 25 日

青字が追記部分，赤字が訂正部分．

章立ておよび章タイトルの変更を奨励

第 6 章 関数近似	$\rightarrow$	第 6 章 補間と近似
第 7 章 常微分方程式	$\searrow$	第 7 章 数値積分
第 8 章 数値積分	$\nearrow$	第 8 章 常微分方程式

p.9

$x_1 = \dfrac{-c}{b+\sqrt{b^2-4ac}}$ を $x_1 = \dfrac{-2c}{b+\sqrt{b^2-4ac}}$ に変更する。

また、$x_2 = \dfrac{c}{\sqrt{b^2-4ac}-b}$ を $x_2 = \dfrac{2c}{\sqrt{b^2-4ac}-b}$ に変更する。

p.10

浮動小数点数

定義 1.8. β 進 t 桁の**浮動小数点数** $\bar{x}$ とは，

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \pm\left(d_0 + \frac{d_1}{\beta} + \frac{d_2}{\beta^2} + \cdots + \frac{d_{t-1}}{\beta^{t-1}}\right) \times \beta^e \\ &= \pm(d_0.d_1d_2\ldots d_{t-1})_\beta \times \beta^e, \\ & d_i \in \{0,1,\ldots,\beta-1\},\ L \le e \le U (L \text{ と } U \text{ は定数}) \end{aligned} \tag{1.1}$$

と表現される数のことである．ここで，$\pm$ を**符号**，e を**指数**，$(d_0.d_1d_2\ldots d_{t-1})_\beta$ を**仮数**という．通常，なるべく多くの有効桁数を保持するために $\bar{x} \neq 0$ のときは $d_0 \neq 0$ となるようにする．これを浮動小数点数の**正規化**という．

p.11

$$\begin{aligned} x_{\max} &= (1.11\ldots1)_2 \times 2^{1023} = (2-2^{-52}) \times 2^{1023} \approx 2^{1024} \\ x_{\min} &= (1.00\ldots0)_2 \times 2^{-1022} = 1.0 \times 2^{-1022} = 2^{-1022} \end{aligned}$$

である．

p.15，問題 1.7 の解答

$$
\begin{aligned}
1+u &= 1+2^{-53} \\
&= \left(1+\frac{0}{2}+\frac{0}{2^2}+\cdots+\frac{0}{2^{52}}\right)\times 2^0+\left(1+\frac{0}{2}+\frac{0}{2^2}+\cdots+\frac{0}{2^{52}}\right)\times 2^{-53} \\
&= \left(1+\frac{0}{2}+\frac{0}{2^2}+\cdots+\frac{0}{2^{52}}+\frac{1}{2^{53}}\right)\times 2^0
\end{aligned}
$$

ここで，$t=53$ なので，$\frac{1}{2^{53}}$ は偶数の丸めにより切り捨てられる．

一方，

$$
\begin{aligned}
1-u &= 1-2^{-53} \\
&= \left(1+\frac{0}{2}+\frac{0}{2^2}+\cdots+\frac{0}{2^{52}}\right)\times 2^0-\left(1+\frac{0}{2}+\frac{0}{2^2}+\cdots+\frac{0}{2^{52}}\right)\times 2^{-53} \\
&= \left(1+\frac{0}{2}+\frac{0}{2^2}+\cdots+\frac{0}{2^{52}}-\frac{1}{2^{53}}\right)\times 2^0=\left(0+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{53}}\right)\times 2^0 \\
&= \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{51}}+\frac{1}{2^{52}}\right)\times 2^{-1}
\end{aligned}
$$

となる．

p.16，箇条書きの 2 つ目

- $1+u=1+2^{-53}=\left(1+\frac{0}{2}+\frac{0}{2^2}+\cdots+\frac{0}{2^{52}}+\frac{1}{2^{53}}+\frac{0}{2^{54}}\right)\times 2^0$ の最終桁が 0 であることに注意すること．$\beta=2$ では，$t+1$ 桁目が 1 で，$t+2$ 桁目以降が 0 ならば，t 桁目から見て $t+1$ 桁目は必ず中間点にある．

p.19

ベクトルノルム

定義 2.1. $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ を任意の n 次元複素ベクトル，つまり，$\forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{C}^n$ とし，α を任意の複素数とする．このとき，次の (N1)〜(N3) を満たす量 $\|\cdot\|$ を**ベクトルノルム**または単に**ノルム**という．

(N1) $\|\boldsymbol{x}\|\geq 0$; $\|\boldsymbol{x}\|=0 \Longleftrightarrow \boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$

(N2) $\|\alpha\boldsymbol{x}\|=|\alpha|\|\boldsymbol{x}\|$

(N3) $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|\leq\|\boldsymbol{x}\|+\|\boldsymbol{y}\|$

ノルム $\|\cdot\|$ はベクトルの大きさを表す非負の実数であり，非負の実数を $\mathbb{R}^+$ と表すと，ノルムは $\mathbb{C}^n$ から $\mathbb{R}^+$ への写像と考えることができる．

p.29 間違いではないが従属ノルムの定義と合わせるために sup を max に変更

行列ノルムの例

$A = [a_{ij}]_{1 \le i,j \le n}$ とする．

1-ノルム $\|A\|_1 = \max_{\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}} \dfrac{\|A\boldsymbol{x}\|_1}{\|\boldsymbol{x}\|_1} = \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$ (最大列和)

2-ノルム $\|A\|_2 = \max_{\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}} \dfrac{\|A\boldsymbol{x}\|_2}{\|\boldsymbol{x}\|_2} = \sqrt{(AA^*)\text{ の最大固有値}}$

A^* は A の共役転置行列

フロベニウスノルム $\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2} = \sqrt{tr(A^*A)}$

$\infty-$ **ノルム, 最大値ノルム**

$$\|A\|_\infty = \max_{\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}} \frac{\|A\boldsymbol{x}\|_\infty}{\|\boldsymbol{x}\|_\infty} = \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \qquad (\text{最大行和})$$

問題 2.7 の解答において A^t を A^* とすれば，A^*A と AA^* の固有値は一致することが分かるので，2-ノルムの定義を $\|A\|_2 = \sqrt{(A^*A)\text{ の最大固有値}}$ としても構わない．また，A^*A の固有値は実数であり，A^*A の固有値は非負なので 2-ノルムは必ず存在する．

p.33 の $\|A\|_2$,$\|A^{-1}\|_2$ の絶対値を外す

したがって，AA^t の固有値は $\lambda = 15 \pm 10\sqrt{2}$ なので，

$$\|A\|_2 = \sqrt{\max \lambda} = \sqrt{15 + 10\sqrt{2}}$$

$$\|A^{-1}\|_2 = \sqrt{\frac{1}{\min \lambda}} = \frac{1}{\sqrt{15 - 10\sqrt{2}}}.$$

p.35

次の演習問題を追加.

演習問題 2.11-1 A を n 次正方複素行列とし，A^* を A の共役転置行列とする．このとき，A^*A の固有値は非負の実数であることを示せ．

(解答)

まず，$A^* = \bar{A}^t$ および $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}^t \bar{\boldsymbol{b}}$ に注意する．A^*A の任意の固有値を λ とし，対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ とすると，

$$\begin{aligned} \lambda(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) &= (\lambda \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = (A^*A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = (A^*A\boldsymbol{x})^t \bar{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}^t A^t (\bar{A}^t)^t \bar{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}^t A^t \bar{A} \bar{x} = \boldsymbol{x}^t \overline{\bar{A}^t A \boldsymbol{x}} \\ &= \boldsymbol{x}^t \overline{A^* A \boldsymbol{x}} = (\boldsymbol{x}, A^*A\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}, \lambda \boldsymbol{x}) = \bar{\lambda}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \end{aligned}$$

なので，$\lambda = \bar{\lambda}$ である．これは λ が実数であることを意味する．

また，

$$
\begin{aligned}
(A\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x}) &= (A\boldsymbol{x})^t\overline{A\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}^t A^t \overline{A\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}^t \overline{\bar{A}^t A\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}^t \overline{A^* A\boldsymbol{x}} = (\boldsymbol{x}, A^* A\boldsymbol{x}) \\
&= (\boldsymbol{x}, \lambda\boldsymbol{x}) = \bar{\lambda}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \lambda(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \geq 0
\end{aligned}
$$

なので，$\lambda \geq 0$ である．

p.52

ニュートン法 (その 1)

問題 3.2. $f(x) = x^3 - 3x + 2$ とする．このとき，次の問に答えよ．
(3) 初期値を $x_0 = 1.2$ とするとき，ニュートン法により $f(x) = 0$ の解 $x = \alpha$ の近似解 $\hat{\alpha}$ を求めよ．ただし，収束判定条件を $|x_{k+1} - x_k| < 0.01$ とし，各ステップの計算結果は小数点第 4 位まで切り捨てで求めよ．(6 点)

p.53

演習問題 3.2 問題 3.2 と同じく $f(x) = x^3 - 3x + 2$ を考えるとき，次の問に答えよ．
(1) 初期値を $x_0 = -3$ とするとき，ニュートン法により $f(x) = 0$ の解 $x = \alpha$ の近似解 $\tilde{\alpha}$ を求めよ．ただし，収束判定条件を $|x_{k+1} - x_k| < 0.01$ とし，各ステップの計算結果は小数点第 4 位まで切り捨てで求めよ．(6 点)
演習問題 3.3 $f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + 9$ とする．このとき，次の問に答えよ．(20 点)
(3) 初期値を $x_0 = 3.5$ とするとき，ニュートン法により $f(x) = 0$ の解 $x = \alpha$ の近似解 $\hat{\alpha}$ を求めよ．ただし，収束判定条件を $|x_{k+1} - x_k| < 0.01$ とし，各ステップの計算結果は小数点第 5 位まで四捨五入で求めよ．(8 点)

p.54

ニュートン法 (**その** 2)

非線形方程式

$$
\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^2 + x_2^3 - 12 \\ x_1^3 + \frac{1}{2}x_2^2 - 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}
$$

を考える．このとき，次の問に答えよ．
(1) $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ に対するニュートン法を書け．(5 点)

p.55

演習問題 3.4
(1) $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ に対するニュートン法を書け．

p.63: (4.3) の後

まず，(4.3) における第 1 列の絶対値最大要素は第 3 行の 3 なので第 1 行と第 3 行を交換する．なお，この最大要素のことを**ピボット**と呼ぶ．

p.71 の【評価基準・注意】の文字サイズを小さくする

【評価基準・注意】============================

- 線形代数の復習問題であり，答えだけを記載すればよいので部分点なし．

=======================================

p.66, p.78

問題 4.7(1) は演習問題 4.3 と同じなので削除しても構わない．

また，配点が演習問題 4.3 と異なっているが，これは学習者の学習進度を考慮しているためである．演習問題 4.3 は部分ピボット選択付きガウス消去法までしか学習していないという仮定の下で出題しているのに対し，問題 4.7 は LU 分解まで知っている (つまり，より連立 1 次方程式の解法に慣れている) という仮定の下に出題している．

p.89

演習問題 4.9 連立 1 次方程式

p.93

演習問題 4.10 連立 1 次方程式

p.97

演習問題 4.11 連立 1 次方程式

p.100

固有値・固有ベクトル

問題 5.1 n 次正方行列 A を $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ の固有値，固有ベクトルを求めよ．(18 点)

p.101 ：【評価基準・注意】の文字サイズを小さくする

p.103：定理 5.2 の後に以下の内容を追加

定理 5.2 より $\|\boldsymbol{x}\| = 1$ のとき，$\|A\boldsymbol{x} - \sigma\boldsymbol{x}\| \leq \varepsilon$ ならば σ を近似固有値とみなしてよいことが分かる．また，$\mathrm{cond}(U)$ の値が大きい場合は，$\|A\boldsymbol{x} - \sigma\boldsymbol{x}\|$ の値が小さくても近似固有値 σ の精度が悪くなる可能性があることも分かる．

p.104

べき乗法のアルゴリズム

固有値が実数の場合，べき乗法のアルゴリズムは次のようになる．ただし，$\boldsymbol{x}^{(0)}$ は正規化された初期ベクトルで，ε は誤差基準である．

do while $\|\boldsymbol{v}\|_2^2 - |\lambda^{(k)}|^2 \geq \varepsilon^2$

$\boldsymbol{v} = A\boldsymbol{x}^{(k)}$

$\lambda^{(k)} = (\boldsymbol{x}^{(k)}, \boldsymbol{v})$ ：固有値

$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \dfrac{\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|_2}$ ：固有ベクトル

end do

実対称行列の固有値は全て実数であり，固有ベクトルも実ベクトルである．従って，上記のアルゴリズムは実対称行列に対して有効であるといえる．

なお，上記のアルゴリズムにおいて収束判定条件が $\|\boldsymbol{v}\|_2^2 - |\lambda^{(k)}|^2 < \varepsilon^2$ となっているのは，近似固有対 $(\lambda^{(k)}, \boldsymbol{x}^{(k)})$ に対して (5.4) の左辺を計算すると

$$\begin{aligned}\|A\boldsymbol{x}^{(k)} - \lambda^{(k)}\boldsymbol{x}^{(k)}\|_2^2 &= \|\boldsymbol{v} - \lambda^{(k)}\boldsymbol{x}^{(k)}\|_2^2 = \|\boldsymbol{v}\|_2^2 - 2(\boldsymbol{v}, \lambda^{(k)}\boldsymbol{x}^{(k)}) + |\lambda^{(k)}|^2\|\boldsymbol{x}\|_2^2 \\ &= \|\boldsymbol{v}\|_2^2 - 2|\lambda^{(k)}|^2 + |\lambda^{(k)}|^2 = \|\boldsymbol{v}\|_2^2 - |\lambda^{(k)}|^2\end{aligned}$$

となるからである．よって，定理 5.2 より $\|\boldsymbol{v}\|_2^2 - |\lambda^{(k)}|^2 < \varepsilon^2$ ならば $\lambda^{(k)}$ を近似固有値とみなすことができる．

p.106

$$\boldsymbol{x}^{(1)} = \frac{\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|_2} = \sqrt{\frac{3}{34}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{34}} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

p.106：【評価基準・注意】の文字サイズを小さくする

p.107:逆反復法のアルゴリズムで添字の i をとる

逆反復法のアルゴリズム (反復 1 回分)

$\boldsymbol{v} = (A - \hat{\lambda}E_n)^{-1}\boldsymbol{y}^{(k)}$
$\mu = (\boldsymbol{y}^{(k)}, \boldsymbol{v})$
$\lambda^{(k)} = \hat{\lambda} + \dfrac{1}{\mu}$
$\boldsymbol{y}^{(k+1)} = \dfrac{\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|_2}$
この $\hat{\lambda}$ を**原点移動量**という.

$\hat{\lambda} = 0$ とすれば，行列 A の絶対値最小固有値を求めることができる．また，行列 A の固有値を λ とし，その近似固有値を $\hat{\lambda}$ とすると $\lambda^{(k)} = \hat{\lambda} + \dfrac{1}{\mu}$ は $\hat{\lambda}$ の改良になっている．なお，コンピュータを使って実際に計算する場合は，直接 $\boldsymbol{v} = (A - \hat{\lambda}E_n)^{-1}\boldsymbol{y}^{(k)}$ を計算するのではなく，連立 1 次方程式 $(A - \hat{\lambda}E_n)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{y}^{(k)}$ を解いて $\boldsymbol{v}$ を求める.

p.108 : 問題 5.3

近似ベクトルを初期ベクトルへ変更.

p.109 : 【評価基準・注意】の文字サイズを小さくする

p.109 : 演習問題 5.3

(2) A の近似固有値 $\hat{\lambda} = 4$ が与えられたとき，逆反復法を 1 回適用して $\hat{\lambda}$ を改良せよ．ただし，初期ベクトル $\boldsymbol{y}^{(0)} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ とする.

p.115 (6.7)

$\displaystyle\prod_{k=0,k\neq i}$ を $\displaystyle\prod_{k=0,k\neq i}^{n}$ に変更。

p.126 : 【評価基準・注意】の文字サイズを小さくする

p.128 : 【評価基準・注意】の文字サイズを小さくする

p.134 : 【評価基準・注意】の文字サイズを小さくする

p.143

複合シンプソン公式

区間 $[a,b]$ を $2n$ 等分して，その分点を x_{2k} とし，各小区間 $[x_{2k}, x_{2k+2}]$ でシンプソンの公式 (8.4) を適用すると**複合シンプソンの公式** (単に，**シンプソンの公式**ともいう)

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\{f_0 + f_{2n} + 4(f_1 + f_3 + \cdots + f_{2n-1}) + 2(f_2 + f_4 + \cdots + f_{2n-2})\}, \quad h = \frac{b-a}{2n} \tag{8.6}$$

を得る．

p.146

台形公式・シンプソンの公式

問題 8.2 $S = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^2}dx$ の近似値を台形公式およびシンプソンの公式を用いて求めよ．ただし，台形公式では閉区間 $[1,2]$ を 2 等分し，シンプソンの公式では $[1,2]$ を 4 等分するものとする．

p.147

演習問題 8.2

(2) S の近似値を台形公式およびシンプソンの公式を用いて求めよ．ただし，台形公式では閉区間 $[0,1]$ を 2 等分し，シンプソンの公式では $[0,1]$ を 4 等分するものとする．

演習問題 8.3

(2) S_1 と S_2 の近似値を台形公式およびシンプソンの公式を用いて小数点以下第 3 位まで求めよ．ただし，台形公式では閉区間 $[0,1]$ および $[0,\frac{1}{2}]$ を 2 等分し，シンプソンの公式では $[0,1]$ および $[0,\frac{1}{2}]$ を 4 等分するものとする．

p.150：演習問題 1.9 の解答

$$\begin{aligned}
1 + 2^{-53} + 2^{-54} &= \left(1 + \frac{0}{2} + \frac{0}{2^2} + \cdots + \frac{0}{2^{52}}\right) \times 2^0 + \left(1 + \frac{0}{2} + \frac{0}{2^2} + \cdots + \frac{0}{2^{52}}\right) \times 2^{-53} \\
&\quad + \left(1 + \frac{0}{2} + \frac{0}{2^2} + \cdots + \frac{0}{2^{52}}\right) \times 2^{-54} \\
&= \left(1 + \frac{0}{2} + \frac{0}{2^2} + \cdots + \frac{0}{2^{52}} + \frac{1}{2^{53}} + \frac{1}{2^{54}}\right) \times 2^0
\end{aligned}$$

ここで，$t = 53$ なので，$\frac{1}{2^{54}}$ の影響により，$\frac{1}{2^{53}}$ は四捨五入 (最近点への丸め) により切り上げられる．よって，

$$1 + u = \left(1 + \frac{0}{2} + \frac{0}{2^2} + \cdots + \frac{0}{2^{51}} + \frac{1}{2^{52}}\right) \times 2^0 = 1 + 2^{-52}$$

となる．

p.170： 演習問題 5.3(2) の解答

(2) $B = A - \hat{\lambda} E_2 = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ -6 & -11 \end{bmatrix}$

$B\boldsymbol{v} = \boldsymbol{y}^{(0)}$ を掃き出し法で解くと

$$\left[\begin{array}{cc|c} 5 & 10 & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ -6 & -11 & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{array}\right] \Longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{12}{5\sqrt{5}} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{5\sqrt{5}} \end{array}\right]$$

より

$$\boldsymbol{v} = \frac{1}{5\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 12 \\ -7 \end{bmatrix}, \quad \|\boldsymbol{v}\|_2^2 = \frac{1}{125}(144 + 49) = \frac{193}{125}$$

$$\mu = (\boldsymbol{y}^{(0)}, \boldsymbol{v}) = \frac{1}{25}(-24 - 7) = -\frac{31}{25}, \quad \lambda^{(0)} = \hat{\lambda} + \frac{1}{\mu} = 4 - \frac{25}{31} = \frac{99}{31} \approx 3.1935483$$

p.181 の先頭に追加

不等号・近似記号

高校まで使用していた不等号 ≦ や ≧ を大学では $\leq$ や $\geq$ と記すことがある．また，高校まで使用していた近似を表す記号 ≒ を大学では $\approx$ と記すことがある．本書では，$\leq, \geq, \approx$ を使用することにする．

p.183 の最後に追加

数ベクトル

自然数 n を固定して n 個の実数を縦に並べた列 $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ を $\mathbb{R}$ 上の n **次元数ベクトル**または n **次元実ベクトル**という．

ベクトルの相等

2 つの n 次元数ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ について，$a_i = b_i$ がすべての $i = 1, 2, \ldots, n$ について成立するとき，これら 2 つの数ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ は**等しい**といって，$\boldsymbol{a}$=$\boldsymbol{b}$ と表す.

ベクトルの呼び方

$\mathbb{R}$ 上の n 次元数ベクトル全体の集合を $\mathbb{R}^n$ と書いて，これを $\mathbb{R}$ 上の n **次元数ベクトル空間**または n **次元実ベクトル空間**という．また，このとき，$\mathbb{R}$ の要素のことを**スカラー**といい，$\mathbb{R}^2$ のベクトルのことを**平面ベクトル**，$\mathbb{R}^3$ のベクトルのことを**空間ベクトル**などと呼ぶ.

通常，ベクトルを表記するのに $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ などのように太文字で表し，スカラーは a, b, x, y のように斜体で書く.

和・スカラー倍

2 つの n 次元数ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ について，**和** $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ を $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{bmatrix}$ と定義する．また，$c \in \mathbb{R}$ による n 次元数ベクトル $\boldsymbol{a}$ の**スカラー倍** $c\boldsymbol{a}$ を $c\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} ca_1 \\ ca_2 \\ \vdots \\ ca_n \end{bmatrix}$ と定義する.

零ベクトル

$\boldsymbol{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ を**零ベクトル**と呼ぶ.

なお，$\mathbb{R}$ 上の数ベクトル空間と同様に，複素数 $\mathbb{C}$ 上の数ベクトル空間も考えることができる.

複素数上の数ベクトル

n 個の $\mathbb{C}$ の要素を縦に並べた列 $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ を $\mathbb{C}$ 上の n 次元数ベクトルと呼ぶ.
また，$\mathbb{C}$ 上の n 次元数ベクトル全体の集合を $\mathbb{C}^n$ と書いて，これは $\mathbb{C}$ 上の n 次元数ベクトル空間という．このときには，$\mathbb{C}$ の要素のことをスカラーという.
なお，$\mathbb{C}^n$ のことを n **次元複素ベクトル空間**ということもある.

$\mathbb{C}^n$ においても $\mathbb{R}^n$ の場合と全く同様にして 2 つの数ベクトルの和，スカラー倍が定義される.

p.190

固有値の性質 (4)

エルミート行列の固有値は実数である．特に， 実対称行列の固有値は実数であり，相異なる固有値に対応する固有ベクトルは直交する.