最終更新日: 2024 年 10 月 23 日

「基礎からスッキリわかる線形代数」(第 3 刷) 正誤表

	誤	正
p.215, 側注を削除	【注意】グラム・シュミットの直交化により，一次独立な固有ベクトルから正規直交基底 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が構成できる.	~~【注意】グラム・シュミットの直交化により，一次独立な固有ベクトルから正規直交基底 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が構成できる.~~
p.215, 定理 7.15	対角化可能な n 次正方行列 A が正定値であるための必要十分条件は，A の固有値がすべて正となることである.	n 次実対称行列 A が正定値であるための必要十分条件は，A の固有値がすべて正となることである.
p.215, 定理 7.15 の証明をすべて変更		A の固有値を $\lambda_i(i=1,2,\ldots,n)$ とすれば，p.213 の議論より， $$(A\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} = {}^t\boldsymbol{y}B\boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i y_i^2$$ が成り立つ. ここで，$\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0} \iff \boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0}$ に注意すれば $$\begin{aligned} A\text{ が正定値} &\iff (A\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) > 0, \quad \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}\text{ は任意} \\ &\iff \sum_{i=1}^{n}\lambda_i y_i^2 > 0, \quad \boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0}\text{ は任意} \\ &\iff \lambda_i > 0, \quad i=1,2,\ldots,n \end{aligned}$$ が成り立つ.

<table>
<tr><th></th><th>誤</th><th>正</th></tr>
<tr><td>p.216，定理 7.15 の証明の後</td><td>ここで,「A が正定値 $\Longrightarrow A$ の固有値が正」の証明において対角化可能性を使っていないことに注意して欲しい．したがって,「A が正定値 $\Longrightarrow A$ の固有値が正」は，対角化可能性を仮定しなくても成り立つ．
また，定理 7.11 より，対称行列は対角化可能なので，定理 7.14 の直接的な結果として次が成り立つ．</td><td>ここで,「A が正定値 $\Longrightarrow$ A の固有値が正」は，A が対称行列でなくても成立することに注意して欲しい．実際，A の固有値を λ_i，対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{v}_i$ とすると，
$$A\boldsymbol{v}_i = \lambda_i\boldsymbol{v}_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$
なので，
$$(\boldsymbol{v}_i, A\boldsymbol{v}_i) = \lambda_i(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_i) = \lambda_i\|\boldsymbol{v}_i\|^2$$
である．
A は正定値なので，$(\boldsymbol{v}_i, A\boldsymbol{v}_i) > 0$ が成り立ち，$\lambda_i > 0$ が成立する．</td></tr>
<tr><td>p.216，系 7.3 を削除</td><td>n 次対称行列 A が正定値であるための必要十分条件は，A の固有値がすべて正となることである．</td><td>~~n 次対称行列 A が正定値であるための必要十分条件は，~~
~~A の固有値がすべて正となることである．~~</td></tr>
<tr><td>p.216，例題 7.14 の解答</td><td>(1)
... 系 7.3 より正定値である．
(2)
... 系 7.3 より正定値ではない．</td><td>(1)
... 定理 7.15 より正定値である．
(2)
... 定理 7.15 より正定値ではない．</td></tr>
<tr><td>p.217，定理 7.16 の証明</td><td>与えられた n 次正方行列 A に対し，A の固有値 λ_1 を 1 つとり，それに属する固有ベクトル $\boldsymbol{a}_1$ をとる．これを最初に含むように $\mathbb{C}^n$ の基底 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n\}$ をとって，行列 P_1 $P_1 = [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n]$ とおくと，
$$AP_1 = A[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n] = [\lambda\boldsymbol{a}_1, A\boldsymbol{a}_2, \ldots, A\boldsymbol{a}_n]\left[\begin{array}{c|ccc} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & A_1 & \\ 0 & & & \end{array}\right],$$
すなわち，</td><td>与えられた n 次正方行列 A に対し，A の固有値 λ_1 を 1 つとり，それに属する固有ベクトル $\boldsymbol{a}_1$ をとる．これを最初に含むように $\mathbb{C}^n$ の基底 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n\}$ をとって，$P_1 = [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n]$ とおくと，
$$AP_1 = A[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n] = [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n]\left[\begin{array}{c|ccc} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & A_1 & \\ 0 & & & \end{array}\right],$$
すなわち，</td></tr>
</table>

	誤	正