第10章　ジョルダン標準形

第 9 章で学んだように定理 9.9 の仮定を満たす行列は対角化可能です．それでは，この仮定を満たさない対角不可能な行列は全く単純化できないのでしょうか? せめて

- 対角化不可能な行列に対して「対角化もどき」を考えることはできないのでしょうか?

実は，この「対角化もどき」が存在するのです．それがジョルダン標準形です．ただし，これを理解するにはかなりの準備が必要なので，第 10.1 節と第 10.2 節においてジョルダン標準形を理解するために欠かせない事柄を説明します．そして，第 10.3 節でジョルダン標準形の特別な場合を扱い，これを第 10.4 節で一般化することにします．

10.1　ケーリー・ハミルトンの定理

対角化不可能な行列に対しては，とりあえず上三角行列に帰着させることができます．これを保証する定理が三角化定理です．なお，三角化定理は，この後のフロベニウスの定理を証明するのに必要となります．

三角化定理

定理 10.1. 任意の n 次複素行列 A は適当な n 次正則行列 P に対して，

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & * & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

となる．また，この逆も成り立つ．ここで，$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ は A の固有値である．

(証明)
($\Longrightarrow$)
A のサイズ n に関する数学的帰納法で示す．
まず，$n = 1$ のときは自明だからサイズが $n - 1$ のときに成り立つと仮定する．
与えられた n 次正方行列 A に対し，A の固有値 λ_1 を 1 つとり，それに属する固有ベクトル $\boldsymbol{a}_1$ をとる．これを最初に含むように $\mathbb{C}^n$ の基底 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n\}$ をとって，行列 P_1

$P_1 = [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n]$ とおくと，

$$AP_1 = A[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n] = [\lambda \boldsymbol{a}_1, A\boldsymbol{a}_2, \ldots, A\boldsymbol{a}_n] \left[\begin{array}{c|ccc} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & A_1 & \\ 0 & & & \end{array}\right],$$

すなわち，$P_1^{-1}AP_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * \\ O & A_1 \end{bmatrix}$ となる．ここで，A_1 はある $n-1$ 次正方行列である．

したがって，帰納法の仮定より，$P_2^{-1}A_1P_2 = \begin{bmatrix} \mu_1 & & * \\ & \ddots & \\ & & \mu_{n-1} \end{bmatrix}$ となる $n-1$ 次正則行列 P_2 が存在する．ただし，$\mu_1, \ldots, \mu_{n-1}$ は A_1 の固有値である．

P_1 と P_2 を用いて n 次正方行列 P を $P = P_1 \left[\begin{array}{c|c} 1 & O \\ \hline O & P_2 \end{array}\right]$ とおくと，P は正則であって，

$P^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} 1 & O \\ \hline O & P_2^{-1} \end{array}\right] P_2^{-1}$ なので，

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \left[\begin{array}{c|c} 1 & O \\ \hline O & P_2^{-1} \end{array}\right] P_1^{-1}AP_1 \left[\begin{array}{c|c} 1 & O \\ \hline O & P_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} 1 & O \\ \hline O & P_2^{-1} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} \lambda_1 & * \\ \hline O & A_1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} 1 & O \\ \hline O & P_2 \end{array}\right] \\ &= \left[\begin{array}{c|c} \lambda_1 & * \\ \hline O & P_2^{-1} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} 1 & O \\ \hline O & P_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \lambda_1 & * \\ \hline O & P_2^{-1}A_1P_2 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \mu_1 & & * \\ & & \ddots & \\ & & & \mu_{n-1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

後は，$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-1}$ が A の固有値であることを示せばよいが，A と $P_1^{-1}AP_1$ は相似なので，定理 9.6 より，A と $P_1^{-1}AP_1$ の固有値の全体が一致することに注意すると，A_1 の固有値全体が $\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$ であることが分かる．

($\Longleftarrow$)

n 次複素行列 A は適当な正則行列 P に対し，

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & * & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

となったとする．このとき，

$$\Phi_{P^{-1}AP} = \begin{vmatrix} x-\lambda_1 & & & \\ & x-\lambda_2 & * & \\ & & \ddots & \\ & & & x-\lambda_n \end{vmatrix} = (x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\cdots(x-\lambda_n)$$

なので，$P^{-1}AP$ の固有値は $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ である．よって，定理 9.6 より，$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ は A の固有値でもある．

■

この三角化定理は，以下で定義される行列多項式[1] に関するさまざまな性質を導くのに重要な役割を果たします．

行列多項式

定義 10.1. 体 K の要素 $a_0, a_1, \ldots, a_m$ と文字 x を用いて

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m$$

と表される式を x についての $K-$ **係数多項式**と呼ぶ．また，n 次正方行列 A

$$p(A) = a_0 E_n + a_1 A + \cdots + a_m A^m$$

を**行列多項式**と呼ぶ．

行列多項式に関する重要な定理を 2 つ紹介します．このうち，ケーリー・ハミルトンの定理がジョルダン標準形を導く際に必要となります．そういう意味では，フロベニウスの定理は不要かもしれませんが，応用上はよく登場するので，あえて取り上げることにしました．

フロベニウスの定理[2]

定理 10.2. $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ の固有値を (重複も含めて) $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_n$ とすると，任意の $\mathbb{C}-$ 係数多項式

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_m x^m \qquad (a_0, a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{C})$$

に対し，行列 $p(A)$ の固有値は $p(\lambda_1),\ p(\lambda_2),\ \ldots,\ p(\lambda_n)$ で与えられる．

(証明)

定理 10.1 より，$B = P^{-1}AP$ が上三角行列になるような n 次正則行列 P を選ぶことができる．すなわち，$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$ とできる．このとき $\forall \in \mathbb{N}$ に対して

$B^k = (P^{-1}AP)^k = P^{-1}A^kP = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & & * \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k \end{bmatrix}$ である．

---

[1]行列多項式が何の役に立つのでしょうか？ その一例を紹介しましょう．微分積分で学ぶマクローリン展開によれば，指数関数 e^x は

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots$$

と展開できます．やや乱暴ないい方ですが，行列多項式という概念が入れば，

$$e^A = E_n + \frac{1}{1!}A + \frac{1}{2!}A^2 + \cdots + \frac{1}{n!}A^n + \cdots$$

というものが考えられるのです．実数 x 上でしか定義できないと思っていた指数関数 e^x が，行列 A 上でも定義できるようになるのです．

[2]Frobenius, Ferdinand Georg(1849-1917). ドイツで活躍した数学者．専門は代数．

よって,

$$\begin{aligned}
P^{-1}p(A)P &= P^{-1}(a_0E_n + a_1A + a_2A^2 + \cdots + a_mA^m)P \\
&= a_0E_n + a_1P^{-1}AP + a_2P^{-1}A^2P + \cdots + a_mP^{-1}A^mP \\
&= a_0E_n + a_1B + a_2B^2 + \cdots + a_mB^m \\
&= \begin{bmatrix} a_0 & & \\ & \ddots & \\ & & a_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1\lambda_1 & & \ast \\ & \ddots & \\ & & a_1\lambda_n \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} a_m\lambda_1^m & & \ast \\ & \ddots & \\ & & a_m\lambda_n^m \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_0 + a_1\lambda_1 + \cdots + a_m\lambda_1^m & & \ast \\ & \ddots & \\ & & a_0 + a_1\lambda_n + \cdots + a_m\lambda_n^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p(\lambda_1) & & \ast \\ & \ddots & \\ & & p(\lambda_n) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

である．したがって，定理 10.1 より，$p(\lambda_1), p(\lambda_2), \ldots, p(\lambda_n)$ は $P^{-1}p(A)P$ の固有値であり，定理 9.6 より，$p(A)$ の固有値でもある．

■

ケーリー・ハミルトンの定理[4]

定理 10.3. n 次複素行列 A に対して，

$$\Phi_A(x) = \det(xE_n - A)$$

とおくと，次が成り立つ．

$$\Phi_A(A) = O \qquad (\text{零行列})$$

(証明)
A の固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ として，A の固有多項式 $\Phi_A(x)$ を
$\Phi_A(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2)\cdots(x - \lambda_n)$ と因数分解すると，
$\Phi_A(A) = (A - \lambda_1E_n)(A - \lambda_2E_n)\cdots(A - \lambda_nE_n)$ である．そこで，
$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \ast \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$ となる正則行列 P をとると，この P に対し，

$$\begin{aligned}
P^{-1}\Phi_A(A)P &= P^{-1}(A - \lambda_1E_n)(A - \lambda_2E_n)\cdots(A - \lambda_nE_n)P \\
&= P^{-1}(A - \lambda_1E_n)PP^{-1}(A - \lambda_2E_n)P\cdots P^{-1}(A - \lambda_nE_n)P \\
&= (P^{-1}AP - \lambda_1E_n)(P^{-1}AP - \lambda_2E_n)\cdots(P^{-1}AP - \lambda_nE_n)
\end{aligned}$$

[4]Cayley, Arthur(1821-1895)，イギリスで活躍した数学者．専門は代数・幾何．
Hamilton, William Rowan(1805-1865), アイルランドで活躍した数学者・物理学者．4 元数を創設した．

となる．ここで，

$$P^{-1}AP-\lambda_1E_n=\begin{bmatrix}0 & & & \\ & \lambda_2 & & * \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix},\quad P^{-1}AP-\lambda_2E_n=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & \lambda_3 & & * \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda_n\end{bmatrix},$$

$$\cdots,\quad P^{-1}AP-\lambda_nE_n=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \ddots & & * \\ & & \lambda_n & \\ & & & 0\end{bmatrix}$$

なので，左から順に掛けていけば，

$$(P^{-1}AP-\lambda_1E_n)(P^{-1}AP-\lambda_2E_n)\cdots(P^{-1}AP-\lambda_nE_n)=O$$

だと分かる．これより，$P^{-1}\Phi_A(A)P=O$ となるので，所望の結果を得る．■

注意 10.1.1. $\Phi_A(x)=\det(xE_n-A)$ において，$x=A$ とおけば $\Phi_A(A)=\det(A-A)=\det O=0$ となるから，ケーリー・ハミルトンの定理が成り立つのは当り前，と思わないようにせよ．この定理が主張しているのは，$\Phi_A(A)=O$ であって，右辺は 0 ではなく零行列 O であることに注意せよ．

ケーリー・ハミルトンの定理とフロベニウスの定理

例 10.1. A を n 次複素行列とし，$m\in\mathbb{N}$ とする．このとき，次を示せ．

(1) A の固有値がすべて 0 ならば，$A^n=O$.

(2) ある m に対して，$A^m=E_n$ ならば，A の固有値の m 乗は 1 である．

解法テクニック（ケーリー・ハミルトンの定理とフロベニウスの定理）

- $P(A)$ を求めたいときは，ケーリー・ハミルトンの定理が使えないか検討せよ．
- $P(A)$ の固有値を求めるときには，フロベニウスの定理が使えないか検討せよ．

【解答】
(1) A の固有値がすべて 0 ならば，A の固有多項式は

$$\Phi_A(x)=x^n$$

という形をしている．よって，ケーリー・ハミルトンの定理より

$$\Phi_A(A)=A^n=O^n$$

である．
(2) A の固有値を $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ とし，$p(x)=x^n$ とすると，フロベニウスの定理より
$p(A)=A^m$ の固有値は $\lambda_1^m,\ldots,\lambda_n^m$ である．
仮定より，$A^m=E_n$ であり，E_n の固有値はすべて 1 なので

$$\lambda_1^m=\cdots=\lambda_n^m=1$$

である．■

■■■ **演習問題** ■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■

演習問題 10.1 $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}$ の固有多項式は $\Phi_A(x) = x^3 - x^2 - 26x - 18$ である．このとき，$A^4 - A^3 - 26A^2 - 17A + 2E_3$ をケーリー・ハミルトンの定理を使って求めよ．

演習問題 10.2 n 次正方行列 A が次の関係を満たすとき，その固有値を求めよ．
(1) $A^2 + E_n = O$　　(2) $A^2 = A$　　(3) $A^3 + A = O$

(ヒント) 零行列 O と単位行列 E_n の固有値はそれぞれ 0 と 1 のみであることと，フロベニウスの定理を使え．

10.2　べき零行列

一般の行列に対して，いきなり「対角化もどき」を考えるのは大変なので，特別な形をした行列を考えてみましょう．例えば，$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ を考えてみます．ここで，$N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ とすれば，$A = 4E_3 + 2N$ と表せます．もしも，N が「対角化もどき」になれば，E_3 は単位行列なので，A は「対角化もどき」になります．それでは，どのような N について議論すればいいのでしょうか? そのためには，N の性質を調べておく必要がありそうです．ちなみに，N のべき乗を計算してみると，$N^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，$N^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ となります．どうやら,「対角化もどき」を考える上で何乗かすると零行列 O となる行列 (これを**べき零行列**といいます) について議論する必要がありそうです．そこで，これから，べき零行列について議論しますが，まずは，より一般的な定義を導入しましょう．

べき零変換

定義 10.2. V を体 K 上のベクトル空間とする．V 上の線形変換 f がある $m \in \mathbb{N}$ について

$$f^m = o \qquad \text{(写像としての零変換)}$$

すなわち，

$$f(f(\cdots f(\boldsymbol{x})\cdots)) = \mathbf{0}, \qquad \forall \boldsymbol{x} \in V$$

を満たすとき，f を**べき零変換**と呼ぶ．

n 次正方行列については，それが定義する $\mathbb{C}^n$ 上の線形変換 f_A がべき零で

あるとき，A を**べき零行列**といいます．言い換えれば，次のようになります．

べき零行列

定義 10.3. n 次正方行列 A に対し，

$$A^m = O$$

となる自然数 m が存在するとき，A は**べき零行列**であるという．

ある自然数 m について

$$A^m = O$$

となるならば，

$$n \geq m \Longrightarrow A^n = O$$

が成り立つので，このようなものの中で最小のものが重要です．

べき零行列の性質

定理 10.4. $A \neq O$ となる n 次正方行列 A に対して

$$A^m = O$$

となる自然数 m が存在すれば，$A^n = O$ である．すなわち，$A^m = O$ となる m は n 次以下である．

(証明)
$A^m = O$ となる $m \in \mathbb{N}$ の中で，あらためて最小のものを考えることができるので，

$$A^{m-1} \neq O$$

と仮定してもよい．さて，ケーリー・ハミルトンの定理によれば，

$$\Phi_A(x) = x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \alpha_2 x^{n-2} + \cdots + \alpha_{n-1} x + \alpha_n$$

に対して

$$\Phi_A(A) = A^n + \alpha_1 A^{n-1} + \alpha_2 A^{n-2} + \cdots + \alpha_{n-1} A + \alpha_n E_n = O$$

が成り立つ．ここで，$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in K$ は A の成分で決まるものである．
この両辺に A^{m-1} を掛けると m 乗以上のべきはすべて消えるので

$$\alpha_n A^{m-1} = O$$

だけが残る．ここで，$A^{m-1} \neq O$ だったので，$\alpha_n = 0$ でなければならない．したがって，

$$A^n + \alpha_1 A^{n-1} + \alpha_2 A^{n-2} + \cdot + \alpha_{n-1} A = O$$

である．次に，この両辺に A^{m-2} を掛けると，先程と同様にして $\alpha_{n-1} A^{m-1} = O$ を得て，$\alpha_{n-1} = 0$ を得る．
以下，この操作を繰り返すことにより，

$$\alpha_{n-2} = 0, \quad \alpha_{n-3} = 0, \quad \cdots \alpha_2 = 0, \quad \alpha_1 = 0$$

を得る．これは，$A^n = O$ を意味する． ■

この定理の主張は，行列 A が m 乗で零行列になっているのならば，A は n 乗までで零行列になっている，ということです．例えば，3 次行列 A に対して，A, A^2, A^3, A^4, $\ldots$, $A^m = O$ ならば，実は $A^3 = O$ が成り立っているのです．

べき零行列の性質

例 10.2. n 次正方行列 A について

$$A \text{ がべき零行列} \iff A^n = O$$

を示せ．

解法テクニック（べき零行列の扱い）

- $A^m = O$ となる m が存在することを利用せよ．
- n 次正方行列 $A \neq O$ に対して，$A^m = O$ ならば m は n 以下であることを活用せよ．

【解答】
($\Longrightarrow$)
A がべき零行列ならば，$A^m = O$ となる $m \in \mathbb{N}$ が存在し，定理 10.4 より，$A^n = O$ である．
($\Longleftarrow$)
$A^n = O$ ならば A はべき零行列であることは定義より明らかである． ■

注意 10.2.1. 例 10.2 より，n 次正方行列 A が $A^n = O$ となるための必要十分条件は，$m \geq n$ となる任意の $m \in \mathbb{N}$ に対して $A^m = O$ が成り立つことだと分かる．また，定理 10.4 および例 10.2 は,「$m < n$ となる $m \in \mathbb{N}$ に対して $A^m = O$ となってはいけない」とは主張していない，ことに注意せよ．

演習問題

演習問題 10.3 n 次正方行列の固有多項式は $\Phi_A(x) = (x - \alpha)^n$ とする．このとき，$N = A - \alpha E_n$ がべき零行列であることを示せ．(ヒント) ケーリー・ハミルトンの定理を使う．

10.3　べき零行列のジョルダン標準形

本節の目標は，べき零行列に対する「対角化もどき」，つまり，ジョルダン標準形を求めることです．今まで，ジョルダン標準形を「対角化もどき」と呼んで，その具体的な定義を示していなかったので，まずは，その定義を与えましょう．

ジョルダン標準形

定義 10.4. $r \in \mathbb{N}$ と $\lambda \in K$ に対して，次のような r 次行列を考える．

$$J_r(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda \end{bmatrix}$$

この r 次正方行列 $J_r(\lambda)$ を r 次**ジョルダン細胞**という[6]．
また，いくつかのジョルダン細胞を対角線に並べた n 次正方行列

$$\begin{bmatrix} J_{r_1}(\lambda_1) & & & \\ & J_{r_2}(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{r_m}(\lambda_m) \end{bmatrix} \quad \text{ただし}, n = r_1 + r_2 + \cdots + r_m$$

を n 次の**ジョルダン行列**あるいは**ジョルダン標準形**という．

例えば，$J_1(2) = 2$，$J_2(3) = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$，$J_3(-2) = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$，

$$\begin{bmatrix} J_1(2) & \\ & J_3(2) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|ccc} 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right], \quad \begin{bmatrix} J_2(2) & \\ & J_2(3) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right]$$

です．
次に，べき零行列はジョルダン標準形へ変換できることを示します．

べき零行列のジョルダン標準形

定理 10.5. f が体 K 上の n 次元ベクトル空間 V 上のべき零変換ならば，V の適当な基底について，f はジョルダン行列で表される．より具体的には，任意の n 次べき零行列 N に対し，適当な n 次正則行列 P をとると，

$$P^{-1}NP = \begin{bmatrix} J_{m_1}(0) & & & \\ & J_{m_2}(0) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{m_k}(0) \end{bmatrix}$$

となる．ただし，$m_1, m_2, \ldots, m_k$ は $m_1 + m_2 + \cdots + m_k = n$ を満たす自然数である．

(証明)
ここでは，$K = \mathbb{C}$ かつ $V = \mathbb{C}^n$ として証明する．

[6] Camille, Jordan(1838-1922)，フランスで活躍した数学者．

N の次数を n とすると，N はべき零行列なので，例 10.2 より，$N = 0 = J_1(0)$ である．したがって，これはジョルダン行列である．そこで，$n \geq 2$ とし，N が $n-1$ 次以下のときには定理の主張が正しいとして，n に関する数学的帰納法で証明する．ただし，$N = O$ のときは，ジョルダン行列になっている[8]ので，$N \neq O$ と仮定する．
べき零行列 N について，例 10.2 より，

$$N: \text{べき零} \iff N^n = O$$

だが，$k(< n)$ について $N^k = O$ となることはあり得る．つまり，ある k について

$$N^k = O \Longrightarrow \forall l \geq k \text{ に対し } N^l = O$$

なので，興味があるのは $N^k = O$ となる最小の k である．そこで，$\begin{cases} N^k = O \\ N^{k-1} \neq O \end{cases}$ とすると，$N^{k-1}\boldsymbol{e} \neq \boldsymbol{0}$ となる $\boldsymbol{e} \in \mathbb{C}^n\,(\boldsymbol{e} \neq \boldsymbol{0})$ が存在し，k 個のベクトル $\boldsymbol{e}, N\boldsymbol{e}, N^2\boldsymbol{e}, \ldots, N^{k-1}\boldsymbol{e}$ は一次独立となる[9]．このとき，$W = L(N^{k-1}\boldsymbol{e}, N^{k-2}\boldsymbol{e}, \ldots N\boldsymbol{e}, \boldsymbol{e})$ とすると W は $\mathbb{C}^n$ の k 次元部分空間で，かつ，$N : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ について不変である[10]．そして，

$$\begin{aligned}
[N^k\boldsymbol{e}, N^{k-1}\boldsymbol{e}, \ldots, N^2\boldsymbol{e}, N\boldsymbol{e}] \quad (&= [N(N^{k-1}\boldsymbol{e}), N(N^{k-2}\boldsymbol{e}), \ldots, N\boldsymbol{e}]) \\
&= [\boldsymbol{0}, N^{k-1}\boldsymbol{e}, \ldots, N^2\boldsymbol{e}, N\boldsymbol{e}] \\
&= [N^{k-1}\boldsymbol{e}, N^{k-2}\boldsymbol{e}, \ldots, N\boldsymbol{e}, \boldsymbol{e}] \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}}_{N \text{ の表現行列}}
\end{aligned}$$

となり，これより，

$$N \iff \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}}_{k} = J_k(0)$$

となる．$n = k$ のときは，$J_k(0)$ が求めるものになっている．
そこで，$k < n$ と仮定する．このとき，もしも，$\mathbb{C}^n$ が W ともう 1 つの $N-$ 不変部分空間 U によって，$\mathbb{C}^n = U \oplus W$ となれば，定理 8.6 より，次の関係を得る．

$$N \iff \left[\begin{array}{c|c} J_k(0) & O \\ \hline O & * \end{array}\right] \begin{array}{l} \updownarrow k \\ \updownarrow n-k \end{array}$$

[8] $J_1(0) = 0$ を対角成分に並べたものはジョルダン行列で，これは零行列です．

[9] $c_1\boldsymbol{e} + c_2N\boldsymbol{e} + c_3N^2\boldsymbol{e} + \cdots + c_kN^{k-1}\boldsymbol{e} = \boldsymbol{0}$ とおいて，N^{k-1} を左からかけると $c_1N^{k-1}\boldsymbol{e} = \boldsymbol{0}$ なので $c_1 = 0$ となります．また，$c_2N\boldsymbol{e} + c_3N^2\boldsymbol{e} + \cdots + c_kN^{k-1}\boldsymbol{e} = \boldsymbol{0}$ に N^{k-2} を左からかけると $c_2N^{k-1}\boldsymbol{e} = \boldsymbol{0}$ なので $c_2 = 0$ でとなります．以下同様にして $c_3 = c_4 = \cdots = c_k = 0$ を得ます．

[10]

$$L(\underbrace{N^k\boldsymbol{e}}_{=\boldsymbol{0}}, N^{k-1}\boldsymbol{e}, \ldots, N^2\boldsymbol{e}, N\boldsymbol{e}) = L(N^{k-1}\boldsymbol{e}, \ldots, N^2\boldsymbol{e}, N\boldsymbol{e}) \subset W$$

であり，$\forall \boldsymbol{x} \in W$ を $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e} + x_2N\boldsymbol{e} + \cdots + x_kN^{k-1}\boldsymbol{e}$ と表すと

$$N\boldsymbol{x} = x_1N\boldsymbol{e} + x_2N^2\boldsymbol{e} + \cdots + x_kN^k\boldsymbol{e} \in L(N^k\boldsymbol{e}, N^{k-1}\boldsymbol{e}, \ldots, N\boldsymbol{e})$$

なので，「$\forall \boldsymbol{x} \in W \Longrightarrow N\boldsymbol{x} \in W$」が成り立ちます．

そこで，$\boldsymbol{f} \in \mathbb{C}^n$ かつ $\boldsymbol{f} \notin W$ となる $\boldsymbol{f}$ をとると

$$N^{n-k}\boldsymbol{f} = \boldsymbol{0}$$

であり，一般に

$$N^l\boldsymbol{f} = \boldsymbol{0}$$

を満たす最小の自然数 l は $n-k$ 以下である．ここで，$W' = L(N^{l-1}\boldsymbol{f}, N^{l-2}\boldsymbol{f}, \ldots, N\boldsymbol{f}, \boldsymbol{f})$ をとると

$$N \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} J_k(0) & O & O \\ O & J_l(0) & O \\ O & O & * \end{bmatrix} \qquad W \text{ と } W' \text{ は別もの}$$

となる．以下同様にして，最終的にべき零行列 N は

$$\begin{bmatrix} J_{r_1}(0) & & & \\ & J_{r_2}(0) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{r_m}(0) \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} n = r_1 + r_2 + \cdots + r_m, \\ J_{r_1}(0), \ldots, J_{r_m}(0) \text{ はジョルダン細胞} \end{array}$$

というジョルダン行列で表せる．

ということで，後は，$\mathbb{C}^n = V \oplus U$ せばよい．そのためには，$\mathbb{C}^n$ の $N-$ 不変部分空間 U で $U \cap W = \{\boldsymbol{0}\}$ を満たすものの中で，次元が最大のものを 1 つとり

$$\mathbb{C}^n = U \oplus W$$

となることを示せばよいが，$U \cap W = \{\boldsymbol{0}\}$ なので，結局，$V = W + U$ となることを示せばよい．そこで，$U + W \subsetneqq \mathbb{C}^n$，すなわち，

$$\boldsymbol{a} \notin U + W \text{ となる } \boldsymbol{a} \in \mathbb{C}^n$$

が存在するとして矛盾を導く．

$N^k = O,\ N^{k-1} \neq O (2 \leq k \leq n)$ より

$$N^k\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0} \in U + W$$

なので，はじめて $U + W$ に入るような N のべき，すなわち，

$$N^{l-1}\boldsymbol{a} \notin U + W$$
$$N^l\boldsymbol{a} \in U + W$$

を満たす $l (2 \leq l \leq k)$ が存在する．

この l に対して

$$\underbrace{N^l\boldsymbol{a}}_{\in U+W} = \underbrace{\boldsymbol{u}}_{\in U} + \underbrace{\sum_{i=0}^{k-1} c_i N^i \boldsymbol{e}}_{\in W} \qquad (\boldsymbol{u} \in U, c_i \in \mathbb{C})$$

と表し，N^{k-1} を左からかけると

$$N^{l+k-1}\boldsymbol{a} = N^{k-1}\boldsymbol{u} + \sum_{i=0}^{k-1} c_i N^{k+i-1}\boldsymbol{e}$$

なので (U は $N-$ 不変なので，$\boldsymbol{u} \in U \Longrightarrow N\boldsymbol{u} \in U \Longrightarrow \cdots \Longrightarrow N^{k-1}\boldsymbol{u} \in U$ に注意)

$$\boldsymbol{0} = \underbrace{N^{k-1}\boldsymbol{u}}_{\in U} + \underbrace{c_0 N^{k-1}\boldsymbol{e}}_{\in W} (\in U \cap W)$$

である．このとき，$U \cap W = \{\boldsymbol{0}\}$ の仮定より

$$N^{k-1}\boldsymbol{u} = c_0 N^{k-1}\boldsymbol{e} = \boldsymbol{0}$$

でなければならないが，$N^{k-1}\boldsymbol{e} \neq \boldsymbol{0}$ より $c_0 = 0$ となる．

そこで,

$$\boldsymbol{b} = \underbrace{N^{l-1}\boldsymbol{a}}_{\notin U+W} - \underbrace{\sum_{i=1}^{k-1} c_i N^{i-1}\boldsymbol{e}}_{\in W}$$

とおくと，$N^{l-1}\boldsymbol{a} \notin U+W$ なので $\boldsymbol{b} \notin U+W$ である．また,

$$\begin{aligned} N\boldsymbol{b} &= N^l\boldsymbol{a} - \sum_{i=1}^{k-1} c_i N^i \boldsymbol{e} \\ &= \left(\boldsymbol{u} + \sum_{i=1}^{k-1} c_i N^i \boldsymbol{e}\right) - \sum_{i=1}^{k-1} c_i N^i \boldsymbol{e} = \boldsymbol{u} \in U \end{aligned}$$

である．
これより，$N\boldsymbol{b} \in U$ かつ U は $N-$ 不変なので，U と $\boldsymbol{b}$ で生成される空間を U' とすると,

$$\boldsymbol{b} \in U' \Longrightarrow N\boldsymbol{b} \in U \subset U'$$

となり，U' は $N-$ 不変部分空間である．また,

$$\dim U' = \dim U + 1 > \dim U$$

は明らかである．
ここで，$\forall \boldsymbol{w} \in U' \cap W$ とすると，$\boldsymbol{w} \in U'$ なので

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v} + t\boldsymbol{b} \quad (\boldsymbol{v} \in U, t \in \mathbb{C})$$

と書け，$\boldsymbol{w} \in W$ でもあるので $t\boldsymbol{b} = -\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} \in U+W$ となるが，$\boldsymbol{b} \notin U+W$ なので $t=0$ である．したがって，$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}$ であり，$\boldsymbol{v} \in U$ かつ $\boldsymbol{w} \in W$ なので $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v} \in U \cap W = \{\boldsymbol{0}\}$ である．結局，$\forall \boldsymbol{w} \in U' \cap W$ に対して $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}$ となるので $U' \cap W = \{\boldsymbol{0}\}$ を得るが，これは U が次元最大という仮定に反する．よって，$\mathbb{C}^n = U+W$ である．

■

定理 10.5 により，べき零行列はジョルダン標準形に変換できることが分かりましたが,「それが何通りあるのか?」という点が不明です．この問に答えるのが，次の定理です．

ジョルダン行列の一意性

定理 10.6. 定理 10.5 において，ジョルダン行列は，ジョルダン細胞の並べ方を除けばただ一通りに定まる．

(証明)
N を表すジョルダン行列における j 次ジョルダン細胞の個数を m_j とすれば，$m_j (1 \leq j \leq k)$ が基底のとり方によらず N だけによって定まることを示せばよい．そのために,

$$A^{k-1} \neq O, \quad A^k = O, \quad r_i = \mathrm{rank}(A^i)\ (0 \leq i \leq k-1)$$

とし，$m_1, m_2, \ldots, m_k$ が $r_0, r_1, \ldots, r_{k-1}$ によって決まることを示す．
固有値 0 の j 次ジョルダン細胞の 2 乗，3 乗を作ると，例えば,

$$J_4(0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} (\mathrm{rank}(J_4(0)) = 3), \quad J_4^2(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} (\mathrm{rank}(J_4^2(0)) = 2)$$

のように，1 の並ぶ斜線が 1 つずつ上に上がっていく．したがって,

$$\mathrm{rank}\left(J_j^i(0)\right) = \begin{cases} j-i & (0 \leq i < j) \\ 0 & (i \geq j) \end{cases}$$

なので，

$$r_i = \sum_{j=i+1}^{k} m_j(j-i) \qquad (0 \le i \le k-1)$$

である．これより，

$$\begin{aligned} r_{k-1} &= m_k \\ r_{k-2} &= m_{k-1} + 2m_k \\ &\vdots \\ r_{k-j} &= m_{k-j+1} + 2m_{k-j+2} + \cdots + (j-1)m_{k-1} + jm_k \\ &\vdots \\ r_1 &= m_2 + 2m_3 + \cdots + (k-1)m_k \\ r_0 &= m_1 + 2m_2 + \cdots + km_k \end{aligned}$$

を得る．これらの式を上から順に見れば，$m_k, m_{k-1}, \ldots, m_1$ が順に $r_{k-1}, r_{k-2}, \ldots, r_1, r_0$ によって決まることが分かる． ■

注意 10.3.1. 定理 10.6 の証明より，ジョルダン細胞の個数は $\mathrm{rank}(A^i)$ のみによって決まる，つまり，A の性質のみによって決まることが分かる．

定理 10.6 は,「並べ方を除けば一通りに定まる」と主張しているので，例えば，次の 2 つは区別しません．

$$\begin{bmatrix} J_2(3) & & \\ & J_2(2) & \\ & & J_1(5) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc|c} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right], \quad \begin{bmatrix} J_2(2) & & \\ & J_1(5) & \\ & & J_2(3) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c|cc} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right]$$

定理 10.5 や定理 10.6 は，ジョルダン標準形の存在や一意性については述べていますが,「ジョルダン細胞の個数はいくつか?」,「各ジョルダン細胞の次数 (大きさ) はいくらか?」といった点についてはについては全く述べていません．実際にジョルダン標準形を求める際には，これらの情報が必要で，これらの問に答えるのが，次の定理 10.7 と定理 10.8 です．

ジョルダン細胞の個数

定理 10.7. 定理 10.5 において，ジョルダン行列の j 次ジョルダン細胞の個数 m_j は

$$m_j = \mathrm{rank}(A^{j+1}) - 2\mathrm{rank}(A^j) + \mathrm{rank}(A^{j-1}), \qquad (j = 1, 2, \ldots, k)$$

である．

(証明)

定理 10.6 の証明より，$r_i = \mathrm{rank}(A^i)$ とすると，

$$r_{k-1} = m_k, \quad r_{k-2} = m_{k-1} + 2m_k, \quad r_{k-3} = m_{k-2} + 2m_{k-1} + 3m_k$$

なので，

$$\begin{aligned} m_{k-2} &= r_{k-3} - 2m_{k-1} - 3m_k = r_{k-3} - 2(r_{k-2} - 2m_k) - 3r_{k-1} \\ &= r_{k-3} - 2r_{k-2} + 4r_{k-1} - 3r_{k-1} = r_{k-3} - 2r_{k-2} + r_{k-1} \end{aligned}$$

である．ここで，$j = k-2$ とすれば，$m_j = r_{j+1} - 2r_j + r_{j-1} (j = 2, 3, \ldots, k-2)$ となる．
■

ジョルダン細胞の次数

定理 10.8. 定理 10.5 において $\begin{cases} A^k = O \\ A^{k-1} \neq O \end{cases}$ を満たす $k (2 \leq k \leq n)$ は最大のジョルダン細胞の次数である．

(証明)
定理 10.5 の証明より明らか． ■

ここで，ジョルダン標準形を求める練習をした方がいいのでしょうが，実際には，ベキ零行列のジョルダン標準形を求めることはないと思います．練習するのであれば，より一般的な問題を扱った方がいいので，具体的な例は後の例 10.3 で示すことにします．

■■■ 演習問題 ■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■

演習問題 10.4 n 次行列 N が $\begin{cases} N^k = O \\ N^{k-1} \neq O \end{cases}$ を満たすとすると，$N^{k-1}\boldsymbol{e} \neq \boldsymbol{0}$ となる $\boldsymbol{e} \in \mathbb{C}^n$ が存在する．このとき，$\boldsymbol{e}, N\boldsymbol{e}, N^2\boldsymbol{e}, \ldots, N^{k-1}\boldsymbol{e}$ は一次独立であることを示せ．

10.4　ジョルダン標準形の存在

ここで説明する内容が，本章のメインです．ここでは，いよいよ「複素行列 A が適当な正則行列によって，$P^{-1}AP$ をジョルダン行列にできる」ことを示します．

まずは，固有方程式 $\Phi_(A) = 0$ が n 重解をもつ場合に，A をジョルダン標準形にできることを示しましょう．

固有方程式が n 重解をもつときのジョルダン標準形

定理 10.9. $K = \mathbb{C}$ とするとき，n 次正方行列 A の固有方程式が $\lambda \in \mathbb{C}$ を n 重解として持つならば，ある n 次正則行列 P について $P^{-1}AP$ はジョルダン行列で表される．

(証明)
仮定より，$\Phi_A(x) = (x-\lambda)^n$ なので，もしも $N = A - \lambda E_n$ がべき零行列ならば，定理 10.5 より，$P^{-1}NP$ はジョルダン行列となる．したがって，$J = P^{-1}NP$ とすると，

$$P^{-1}AP = P^{-1}(N + \lambda E_n)P = P^{-1}NP + \lambda E_n = J + \lambda E_n$$

となるので，$P^{-1}AP = N + \lambda E_n$ もジョルダン行列である．
ゆえに，後は，$N = A - \lambda E_n$ がべき零行列であることを示せばよい．

仮定より $\Phi_A(x) = \det(xE_n - A) = (x-\lambda)^n$ なので $N = A - \lambda E_n$ とおくと

$$\begin{aligned}\Phi_N(x) &= \det(xE_n - N) = \det(xE_n - A + \lambda E_n) = \det((x+\lambda)E_n - A) \\ &= \Phi_A(x+\lambda) = ((x+\lambda)-\lambda)^n = x^n\end{aligned}$$

よって，ケーリー・ハミルトンの定理より

$$\Phi_N(N) = O$$

であり，一方，$\Phi_N(N) = N^n$ なので，結局

$$N^n = O$$

を得て，N はべき零行列であることが分かる． ■

$K = \mathbb{R}$ のときでも，A の固有多項式が

$$\Phi_A(x) = (x-\lambda)^n, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

と因数分解できるときは，定理 10.9 は成立します．ここで示したように，$K = \mathbb{C}$ ならば，代数学の基本定理 (定理 7.3) より，重複度も含めて $\Phi_A(x) = 0$ の解が必ず n 個存在しますが，$k = \mathbb{R}$ のときは必ず存在するとは限りません．これが $K = \mathbb{C}$ として多くの定理が証明されている理由です．ある意味，これは $K = \mathbb{C}$ の数学的な自然さを表しているといえます．

さて，ここからは，一般の n 次複素行列に対し，適当な正則行列を選んで $P^{-1}AP$ をジョルダン行列にできることを示します．そのために必要となる概念を導入し，基本的な性質を調べておきましょう．

広義固有空間

定義 10.5. n 次正方行列 A とその固有値 λ に対して

$$W(\lambda) = \{\boldsymbol{x} \in K^n | (A - \lambda E_n)^n \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\} = \mathrm{Ker}(f_A - \lambda I)^n$$

を固有値 λ に属する**広義固有空間** (または**一般固有空間**) という．

目的の定理を証明するために少し準備をしましょう[11]．

広義固有空間の f_A− 不変性

補題 10.1. A の固有値 λ に属する固有空間を $V(\lambda)$，つまり

$$V(\lambda) = \{\boldsymbol{x} \in K^n | (A - \lambda E_n)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$$

とすると，$V(\lambda) \subset W(\lambda)$ であり，さらに，$W(\lambda)$ は f_A− 不変である．

(証明)

$\forall \boldsymbol{x} \in V(\lambda)$ に対して

$$(A - \lambda E_n)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

が成り立つので，両辺に左から $(A - \lambda E_n)^{n-1}$ を掛けて

$$(A - \lambda E_n)^n \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

[11] 自分が主張したい定理を示すために，必要な準備として補題を用意していく，というのは数学の常套手段です．

が成り立つ．よって，$\boldsymbol{x} \in W(\lambda)$ なので，$V(\lambda) \subset W(\lambda)$ である
次に，$\forall \boldsymbol{x} \in W(\lambda)$ に対して

$$f_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x} - \lambda\boldsymbol{x} + \lambda\boldsymbol{x} = (A - \lambda E_n)\boldsymbol{x} + \lambda\boldsymbol{x}$$

なので，$(A - \lambda E_n)^n \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ に注意すれば，

$$\begin{aligned}
(A - \lambda E_n)^n (A\boldsymbol{x}) &= (A - \lambda E_n)^n \{(A - \lambda E_n)\boldsymbol{x} + \lambda\boldsymbol{x}\} \\
&= (A - \lambda E_n)^{n+1}\boldsymbol{x} + (A - \lambda E_n)^n (\lambda\boldsymbol{x}) \\
&= (A - \lambda E_n)(A - \lambda E_n)^n\boldsymbol{x} + \lambda(A - \lambda E_n)^n\boldsymbol{x} \\
&= \boldsymbol{0}
\end{aligned}$$

である．よって，$f_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} \in W(\lambda)$ なので，$W(\lambda)$ は f_A- 不変である． ■

広義固有空間の和空間と直和

補題 10.2. λ が A の固有値でないときは，

$$W(\lambda) = \{\boldsymbol{0}\}$$

である．また，$\alpha \neq \beta$ のときは，$W(\alpha) \cap W(\beta) = \{\boldsymbol{0}\}$，つまり，

$$W(\alpha) + W(\beta) = W(\alpha) \oplus W(\beta)$$

である．

(証明)
(前半の証明)
λ が A の固有値でないとし，$W(\lambda) = \{\boldsymbol{0}\}$ と仮定する．つまり，$\boldsymbol{x} \in W(\lambda)$ かつ $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ となる $\boldsymbol{x}$ が存在したとすると，

$$(A - \lambda E_n)\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0} \quad \text{かつ} \quad (A - \lambda E_n)^n\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

なので，

$$(A - \lambda E_n)^p\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0} \quad \text{かつ} \quad (A - \lambda E_n)^{p+1}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

となる自然数 $p(1 \leq p < n)$ がただ 1 つ存在する．しかし，$\boldsymbol{x}' = (A - \lambda E_n)^p\boldsymbol{x}$ とおけば，$\boldsymbol{x}'$ は

$$\boldsymbol{x}' \neq \boldsymbol{0} \quad \text{かつ} \quad (A - \lambda E_n)\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{0}$$

を満たすので，A の固有値 λ に属する固有ベクトルであることになり，λ が A の固有値ではないという仮定に反する．したがって，$W(\lambda) = \{\boldsymbol{0}\}$ である．
(後半の証明)
$\boldsymbol{x} \in W(\alpha) \cap W(\beta)$, $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ となる $\boldsymbol{x}$ が存在したとすると，$(A - \alpha E_n)^n\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ より，

$$(A - \alpha E_n)^p\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0} \quad \text{かつ} \quad (A - \alpha E_n)^{p+1}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

となる整数 $p(0 \leq p < n)$ がただ 1 つ存在する．
そこで，$\boldsymbol{x}' = (A - \alpha E_n)^p\boldsymbol{x}$ とおくと $\boldsymbol{x}' \neq \boldsymbol{0}$ であって，

$$(A - \alpha E_n)\boldsymbol{x}' = (A - \alpha E_n)^{p+1}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0},$$

つまり，$\boldsymbol{x}'$ は固有値 α に属する固有ベクトルである．
したがって，

$$(A - \beta E_n)\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}' - \beta\boldsymbol{x}' = \alpha\boldsymbol{x}' - \beta\boldsymbol{x}' = (\alpha - \beta)\boldsymbol{x}'$$

であり，ゆえに，

$$(A - \beta E_n)^n\boldsymbol{x}' = (\alpha - \beta)^n\boldsymbol{x}' \neq \boldsymbol{0} \tag{10.1}$$

である．

一方，$A-\alpha E_n$ と $A-\beta E_n$ の可換性

$$(A-\alpha E_n)(A-\beta E_n)=A^2-(\alpha+\beta)A+\alpha\beta E_n=(A-\beta E_n)(A-\alpha E_n)$$

に注意すれば，

$$\begin{aligned}(A-\beta E_n)^n\boldsymbol{x}' &= (A-\beta E_n)^n(A-\alpha E_n)^p\boldsymbol{x}=(A-\alpha E_n)^p(A-\beta E_n)^n\boldsymbol{x}\\ &= (A-\alpha E_n)^p\mathbf{0}=\mathbf{0}\end{aligned}$$

となるが，これは (10.1) に矛盾する． ■

補題 10.3 を拡張すると，次の補題が得られます．

広義固有空間の直和

補題 10.3. $A\in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ の異なる固有値を $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_p$ とし，それぞれの広義固有空間 $W(\lambda_1), W(\lambda_2),\ldots,W(\lambda_p)$ から $\mathbf{0}$ 以外のベクトル $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\ldots,\boldsymbol{x}_p$ を 1 つずつ勝手にとってくると，これらは必ず一次独立になる．すなわち，

$$i\neq j\Longrightarrow W(\lambda_i)\cap W(\lambda_j)=\{\mathbf{0}\}$$

である．

(証明)

$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\ldots,\boldsymbol{x}_k(k=1,2,\ldots,p)$ が一次独立であることを k についての数学的帰納法で証明する．

$k=1$ のときは明らかである[12]．そこで，ある $k\geq 2$ について，$k-1$ 個のベクトルのときは成立するとして，k 個のベクトル $\boldsymbol{x}_1\in W(\lambda_1)$, $\boldsymbol{x}_2\in W(\lambda_2)$, $\ldots$, $\boldsymbol{x}_k\in W(\lambda_k)$ をとってきて，

$$c_1\boldsymbol{x}_1+c_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+c_k\boldsymbol{x}_k=\mathbf{0}\qquad(c_1,c_2,\ldots,c_k\in\mathbb{C})$$

とする．この両辺に $(A-\lambda_kE_n)^n$ を左から掛けると，$(A-\lambda_kE_n)^n\boldsymbol{x}_k=\mathbf{0}$ より，

$$c_1(A-\lambda_kE_n)^n\boldsymbol{x}_1+c_2(A-\lambda_kE_n)^n\boldsymbol{x}_2+\cdots+c_{k-1}(A-\lambda_kE_n)^n\boldsymbol{x}_{k-1}=\mathbf{0}\tag{10.2}$$

となる．ここで，補題 10.1 より，すべての $W(\lambda_i)$ は A の表す線形変換 f_A で不変なので，$A-\lambda_kE_n$ の表す線形変換で不変である[13]．ゆえに，

$$\boldsymbol{x}'_1=(A-\lambda_kE_n)^n\boldsymbol{x}_1,\quad \boldsymbol{x}'_2=(A-\lambda_kE_n)^n\boldsymbol{x}_2,\quad \ldots,\boldsymbol{x}'_{k-1}=(A-\lambda_kE_n)^n\boldsymbol{x}_{k-1},$$

とおくと，

$$\boldsymbol{x}'_1\in W(\lambda_1),\quad \boldsymbol{x}'_2\in W(\lambda_2),\quad \ldots,\quad \boldsymbol{x}'_{k-1}\in W(\lambda_{k-1})$$

なので，これらは帰納法の仮定より，一次独立である．

したがって，

$$c_1\boldsymbol{x}'_1+c_2\boldsymbol{x}'_2+\cdots+c_{k-1}\boldsymbol{x}'_{k-1}=\mathbf{0}\Longrightarrow c_1=c_2=\cdots=c_{k-1}=0$$

でなければならない．よって，これと (10.2) より，$c_k\boldsymbol{x}_k=\mathbf{0}$ なので $c_k=0$ である．ゆえに，$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\ldots,\boldsymbol{x}_{k-1},\boldsymbol{x}_k$ も一次独立である． ■

広義固有空間の次元

補題 10.4. n 次複素行列 A の固有値 λ の (代数的) 重複度を m とすると，λ の広義固有空間 $W(\lambda)$ について

$$\dim W(\lambda)=m$$

が成り立つ．

[12]ちなみに，補題 10.2 より $k=2$ のときも成立することが分かります．

[13]実際，$\boldsymbol{x}\in W(\lambda_i)$ とすると，$A\boldsymbol{x},\lambda_k\boldsymbol{x}\in W(\lambda_i)$ であり，$W(\lambda_i)$ は部分空間なので，$(A-\lambda_kE_n)\boldsymbol{x}=A\boldsymbol{x}-\lambda_k\boldsymbol{x}\in W(\lambda_i)$ が成り立ちます．

(証明)
三角化定理 (定理 10.1) より，適当な正則行列 P によって

$$P^{-1}AP = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \lambda & & & & & \\ & \ddots & * & & * & \\ & & \lambda & & & \\ \hline & & & * & & \\ & & & & \ddots & * \\ & & & & & * \end{array}\right]\begin{array}{c} \uparrow \\ m \\ \downarrow \\ \uparrow \\ n-m \\ \downarrow \end{array}$$

とできる．ここで，$B = P^{-1}AP$ とおくと，行列 B の固有値 λ に属する広義固有空間 $\{\boldsymbol{y} \mid (B-\lambda E_n)^n\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}\}$ は，$B-\lambda E_n$ の形

$$B-\lambda E_n = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & & & & & \\ & \ddots & * & & * & \\ & & 0 & & & \\ \hline & & & * & & \\ & & & & \ddots & * \\ & & & & & * \end{array}\right]\begin{array}{c} \uparrow \\ m \\ \downarrow \\ \uparrow \\ n-m \\ \downarrow \end{array}$$

より，
$\boldsymbol{y} = {}^t[\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_m, 0, \ldots, 0] \in \mathbb{C}^n$ なる $\boldsymbol{y}$ の全体であるから m 次元空間をなす．同型写像 $\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{y}$ により，この空間は $W(\lambda) = \{\boldsymbol{x} \mid (A-\lambda E_n)^n\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$ に写される．ゆえに，$\dim W(\lambda) = m$ である．■

広義固有空間と直和分解

定理 10.10． $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ の相異なるすべての固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$，それぞれの重複度を $m_1, m_2, \ldots, m_p$ とおけば，$\mathbb{C}^n$ は $W(\lambda_1), W(\lambda_2), \ldots, W(\lambda_p)$ の直和に分解される．すなわち，

$$\mathbb{C}^n = W(\lambda_1) \oplus W(\lambda_2) \oplus \cdots \oplus W(\lambda_p)$$

である．さらに，$\dim W(\lambda_i) = m_i (i = 1, 2, \ldots, p)$ である．

(証明)
補題 10.3, 10.4 より明らか．■

$W(\lambda_1), W(\lambda_2), \ldots, W(\lambda_p)$ に対応する部分は，定理 10.10 より，ジョルダン行列で表現できることが分かります．

すでに，n 次行列が，$\Phi_A(x) = (x-\lambda)^n$ を満たすならば A はジョルダン行列に変形できることが分かっています．そして，$\Phi_A(x) = (x-\lambda_1)^{m_1}(x-\lambda_2)^{m_2}\cdots(x-\lambda_p)^{m_p}$ のときは

$$\mathbb{C}^n = W(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus W(\lambda_p)$$

であり，$W(\lambda_i)$ 上では $\Phi_A(x) = (x-\lambda_i)^{m_i} = 0$ となります．

これは，$W(\lambda_i)$ 上でジョルダン行列に変形できることを意味するので，結局，A 全体もジョルダン行列になります．

複素行列に対するジョルダン標準形の存在

定理 10.11． 任意の $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ に対し，適当な n 次正則複素行列 P をとると，$P^{-1}AP$ はジョルダン行列になり，そのジョルダン行列を構成するジョルダン細胞は順序の違いを除くと一意に定まる．

(証明)
A の相異なるすべての固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ としてそれぞれの広義固有空間 $W(\lambda_1)$, $W(\lambda_2), \ldots, W(\lambda_p)$ をとると，定理 10.10 より，

$$\mathbb{C}^n = W(\lambda_1) \oplus W(\lambda_2) \oplus \cdots \oplus W(\lambda_p)$$

と分解でき，しかも，すべての $W(\lambda_i)$ は補題 10.1 より f_A− 不変である．
したがって，定理 8.7 より，$W(\lambda_1), W(\lambda_2), \ldots, W(\lambda_p)$ のそれぞれの基底を並べて $\mathbb{C}^n$ の基底を作ることができ，その基底について $f_A = A$ は $\begin{bmatrix} \boxed{J_1} & & & \\ & \boxed{J_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{J_p} \end{bmatrix}$ のように表すことができる．ここで，対角線上に並ぶ各ブロックの行列は変換 f_A をそれぞれの空間 $W(\lambda_1)$, $W(\lambda_2), \ldots, W(\lambda_p)$ に限定して考えたときの行列であり，しかも各空間 $W(\lambda_i)$ での固有値は λ_i のみである[14]．
したがって，定理 10.9 より，それぞれの基底をうまく選べば，この対角ブロックのそれぞれの行列をジョルダン行列にすることができる[15]．そして，それぞれの対角ブロックがジョルダン行列になれば，全体もジョルダン行列になる．
また，定理 10.6 より，与えられたべき零行列 A に対し，そのジョルダン行列を構成するジョルダン細胞は順序の違いを除くと一意に定まるものであったから，ここで示されたジョルダン行列もジョルダン細胞の並べ方の違いを無視すれば一意に定まる．■

ジョルダン標準形を導く上で，本質的なのは固有多項式 $\Phi_A(x)$ を 1 次の因数の積の形

$$(x-\lambda_1)^{m_1}(x-\lambda_2)^{m_2}\cdots(x-\lambda_p)^{m_p}$$

にまで因数分解できるという仮定なので，これが満たされるならば，実行列の場合でもジョルダン標準形を得ることはできます．

実行列に対するジョルダン行列の存在

定理 10.12. n 次実行列 A に対し，その固有多項式が $\mathbb{R}$− 係数の 1 次の因数の積にまで因数分解できるならば，適当な n 次正則実行列 P に対し，$P^{-1}AP$ がジョルダン行列になる．

定理 10.11 より，すべての n 次複素行列はジョルダン行列に変形できることが分かりました．実際に，このジョルダン行列を具体的に求めるには，ジョルダン細胞とその次数を求めなければならないので，以下では，これらについて述べることにしましょう．

ジョルダン細砲の個数

定理 10.13. n 次複素行列 A の固有値を λ とし，$r = \mathrm{rank}(A - \lambda E_n)$ とする．このとき，固有値 λ のジョルダン細胞の個数は $n - r$ 個，つまり，固有値 λ に属する A の固有空間の次元に等しい．

(証明)

[14] $W(\lambda_i)$ 上では $\Phi_A(x) = (x-\lambda_i)^{m_i} = 0$ なので，固有値は λ_i のみです．
[15]「基底をうまくとればジョルダン行列になる」と主張しているだけで，どのように基底を選ぶのか？ ジョルダン細胞はいくつあるのか？ といったことについては何も触れていません．

$$J = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} J_{m_1}(\lambda_1) & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & J_{m_j}(\lambda_j) & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & J_{m_k}(\lambda_k) \end{bmatrix}, n = m_1+m_2+\cdots+m_j+\cdots+m_k$$

と表すと,

$$J - \lambda_j E_n = \begin{bmatrix} J_{m_1}(\lambda_1)-\lambda_j & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & J_{m_j}(\lambda_j)-\lambda_j & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & J_{m_k}(\lambda_k)-\lambda_j \end{bmatrix}$$

である.

A の固有値 λ_j に対するジョルダン細胞の個数を l_j，つまり，$J_{m_j}(\lambda_j)$ は l_j 個のジョルダン細胞から構成されているとする．ここで，$J_{m_j}(\lambda_j)-\lambda_j$ 以外の部分は $\lambda_i \neq \lambda_j$ より，

$$m_i = \mathrm{rank}\,(J_{m_i}(\lambda_i) - \lambda_j E_{m_i}) \qquad (i \neq j)$$

である．これは，$J_{m_i}(\lambda_i) - \lambda_j E_{m_i} = \begin{bmatrix} \lambda_i - \lambda_j & * & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & * \\ & & & \lambda_i - \lambda_j \end{bmatrix}$ となっていることから分かる[16].

また，$J_{m_j}(\lambda_j) - \lambda_j E_{m_j} = \begin{bmatrix} 0 & * & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & * \\ & & & 0 \end{bmatrix}$ である.

$l_j = 1$ のとき，$*$ はすべて 1 なので，$\mathrm{rank}\big(J_{m_j}(\lambda_j) - \lambda_j E_{m_j}\big) = m_j - 1$ となり，

$$\mathrm{rank}(J - \lambda_j E_n) = m_1 + \cdots + (m_j - 1) + m_{j+1} + \cdots + m_k = n - 1$$

である．$l_j = 2$ のとき，$J_{m_j}(\lambda_j) - \lambda_j E_{m_j}$ は $\left[\begin{array}{c|cccc} 0 & & & & \\ \hline & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{array}\right]$ や

$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & & & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & & & \\ & & \ddots & 1 & & & & \\ & & & 0 & & & & \\ \hline & & & & 0 & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & & & \ddots & 1 \\ & & & & & & & 0 \end{array}\right]$ のようになっており，どのように分けても 1 の個数

[16] ここの $*$ は 1 か 0 の数です.

は m_j-2 なので

$$\mathrm{rank}\left(J_{m_j}(\lambda_j)-\lambda_j E_{m_j}\right)=m_j-2$$

である．よって，

$$\mathrm{rank}(J-\lambda_j E_n)=m_1+\cdots+(m_j-2)+m_{j+1}+\cdots+m_k=n-2$$

である．以下，同様に考えて，一般に

$$\mathrm{rank}\left(J_{m_j}(\lambda_j)-\lambda_j E_{m_j}\right)=m_j-l_j$$

が成り立つことが分かるので，結局，

$$\mathrm{rank}(J-\lambda_j E_n)=n-l_j$$

が成り立つことも分かる．ここで，

$$\mathrm{rank}(A-\lambda_j E_n)=\mathrm{rank}\left(P^{-1}(A-\lambda_j E_n)P\right)=\mathrm{rank}(J-\lambda_j E_n)$$

なので，$\mathrm{rank}(A-\lambda_j E_n)=n-l_j$，つまり，$l_j=n-\mathrm{rank}(A-\lambda_j E_n)$ である．これは，λ_j に対するジョルダン細胞の個数 l_j は λ_j に対する固有空間の次元に等しいことを意味する．

■

ジョルダン細胞の次数と個数の関係

定理 10.14. 定理 10.11 のジョルダン標準形を

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_k \end{bmatrix}$$

と書くとき，各 J_i の対角線にブロックとして現われる固有値 λ に属するジョルダン細胞の j 次ジョルダン細胞の個数 m_j は

$$m_j=\mathrm{rank}(A-\lambda E_n)^{j+1}-2\mathrm{rank}(A-\lambda E_n)^j+\mathrm{rank}(A-\lambda E_n)^{j-1}$$

である．

(証明)
定理 10.7 の A を $A-\lambda E_n$ と置き換えて各 J_i に対して適用すればよい．■

ここまでの話を整理すると，

(1) 定理 10.13 より，固有値 λ のジョルダン細胞の個数が分かる

(2) 定理 10.14 より，固有値 λ に属する j 次ジョルダン細胞の個数がわかる

ということです．したがって，ジョルダン行列を具体的に求めるには，j の値を求める必要があります．そのために，標数という概念を導入し，これが固有値 λ のジョルダン細胞の最大次数であることを示します．

標数

定義 10.6. λ に属する広義固有空間 $W(\lambda)$ に対して

$$(A-\lambda E_n)^k\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$$

となる最小の自然数 $k(1\leq k\leq n)$ が存在する．これを λ に対する**標数**という．

標数と代数的重複度

定理 10.15. k を λ に属する標数とし，m を λ の代数的重複度とすると

$$\mathrm{rank}(A-\lambda E_n)^k = n-m \tag{10.3}$$

である．また，逆も成り立つ，つまり，(10.3) を満たす最小の k が標数である．

(証明)
補題 10.4 より，λ に属する広義固有空間を $W(\lambda)$ とすると，$m=\dim W(\lambda)$ である．一方，

$$\begin{aligned} W(\lambda) &= \{\boldsymbol{a}\in\mathbb{C}^n \mid (A-\lambda E_n)^n\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\} \\ &= \{\boldsymbol{a}\in\mathbb{C}^n \mid (A-\lambda E_n)^k\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\} = \mathrm{Ker}(A-\lambda E_n)^k \end{aligned}$$

である．よって，次元公式より，

$$\dim W(\lambda) = n-\dim\mathrm{Im}(A-\lambda E_n)^k = n-\mathrm{rank}(A-\lambda E_n)^k$$

となるので，$m=n-\mathrm{rank}(A-\lambda E_n)^k$ となり，所望の結果を得る． ■

標数とジョルダン細胞の次数

定理 10.16. 定理 10.14 の J_i に対し，固有値 λ の標数 k は最大のジョルダン細胞の次数である．

(証明)
定理 10.8 において，A を $A-\lambda E_n$ と置き換え，各 J_i に対して適用すればよい． ■

それでは，最後にジョルダン標準形を具体的に求めてみましょう．

ジョルダン標準形の例

例 10.3. $A=\begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ をジョルダン標準形に変換し，そのときの変換行列を求めよ．

解法テクニック (ジョルダン標準形の導出)

- n 次行列 A のジョルダン標準形を求める際には，次のステップを踏め．
  (1) A の固有値 λ を求める．
  (2) $r=\mathrm{rank}(A-\lambda E_n)$ を求める．
  (3) 固有値 λ のジョルダン細胞の個数を $n-r$ として求める．
  (4) $\mathrm{rank}(A-\lambda E_n)^k=0$ となる k を求める．k は λ に属する標数で，これが λ のジョルダン細胞の最大次数である．
  (5) j 次ジョルダン細胞の個数を $m_j=\mathrm{rank}(A-\lambda E_n)^{j+1}-2\mathrm{rank}(A-\lambda E_n)^j+\mathrm{rank}(A-\lambda E_n)^{j-1}$ で求める．
  (6) 以上の情報をもとに，ジョルダン標準形 J を求める．
  (7) $J=P^{-1}AP$ となる変換行列 P を求めるときは，$PJ=AP$ を利用する．

【解答】
(ステップ 1) 固有値を求める．

$$\Phi_A(x) = |xE_3 - A| = \begin{vmatrix} x-4 & -1 & -1 \\ 1 & x-2 & 1 \\ 0 & 0 & x-3 \end{vmatrix} = (x-3)\begin{vmatrix} x-4 & -1 \\ 1 & x-2 \end{vmatrix} = (x-3)\{(x-4)(x-2)+1\} = (x-3)^3$$

より A の固有値は 3 である．
(ステップ 2) $\mathrm{rank}(A-3E_3)$ **を求める．**

$$A - 3E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

より，$\mathrm{rank}(A-3E_3) = 1$ である．
(ステップ 3) ジョルダン細胞の個数を求める．
よって，固有値 3 のジョルダン細胞の個数は $3-1=2$ 個である．
(ステップ 4) ジョルダン細胞の最大次数を求める．
また，$(A-3E_3)^2 = O$ より $\mathrm{rank}(A-3E_3)^2 = 0 = 3-3$ を得るので固有値 3 に属する標数は 2 である．よって，固有値 3 のジョルダン細胞の最大次数は 2 である．
(ステップ 5) ジョルダン細胞の各次数を求める．
行列 A のサイズが 3，ジョルダン細胞の個数が 2，最大次数が 2 と分かっているので，これ以上，ジョルダン細胞の次数を求める必要はない．形としては，$\left[\begin{array}{c|cc} 3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{array}\right]$ もしくは $\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 3 \end{array}\right]$ に限られる．
(ステップ 6) ジョルダン標準形を求める．
よって，求めるべきジョルダン標準形 J は

$$J = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

である．
(ステップ 7) $PJ = AP$ **を使って変換行列** P **を求める．**
変換行列を $P = [\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3]$ と書くと $AP = PJ$ より

$$\begin{cases} A\boldsymbol{p}_1 = 3\boldsymbol{p}_1 \\ A\boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{p}_1 + 3\boldsymbol{p}_2 \\ A\boldsymbol{p}_3 = 3\boldsymbol{p}_3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} (A-3E_3)\boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{0} \\ (A-3E_3)\boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{p}_1 \\ (A-3E_3)\boldsymbol{p}_3 = \boldsymbol{0} \end{cases}$$

を満たす一次独立な $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$, $\boldsymbol{p}_3$ を求めればよい．この処理をスムーズに行うために $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ として $(A-3E_3)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ が解を持つための必要十分条件を調べておく．

$$[A-3E_3|\boldsymbol{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & b_1 \\ -1 & -1 & -1 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 & b_1+b_2 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 \end{array}\right]$$

より，$(A-3E_3)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ が解を持つための必要十分条件は

$$b_1 + b_2 = 0 \quad \text{かつ} \quad b_3 = 0$$

であり，この条件を満たす $\boldsymbol{b}$ に対して解 $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ は，

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} b_1 - s - t \\ t \\ s \end{bmatrix} \qquad (s, t \text{ は任意})$$

と表せる．

さて，$(A - 3E_3)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解は，$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -s-t \\ t \\ s \end{bmatrix}$ であるが，$(A - 3E_3)\boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{p}_1$ が解けるように $s = 0, t = 1$ として $\boldsymbol{p}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ と選ぶことができる．

このとき，$(A - 3E_3)\boldsymbol{y} = \boldsymbol{p}_1$ の解は $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} -1-s-t \\ t \\ s \end{bmatrix}$ となるので，$t = s = 1$ として $\boldsymbol{p}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ と選べる．最後に，$(A - 3E_3)\boldsymbol{p}_3 = \boldsymbol{0}$ の解として $\boldsymbol{p}_1$ と一次独立になるように $\boldsymbol{x}$ において $t = s = 1$ として $\boldsymbol{p}_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ と選ぶ．

よって，求めるべき変換行列 P は

$$P = [\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3] = \begin{bmatrix} -1 & -3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

である．■

【評価基準・注意】===========================

- 固有値を 個 有値と書かない．
- A が 3 次行列なので，標準化した結果が 2 次や 4 次行列になっていたらおかしい．
- 「標数 $\neq$ ジョルダン細胞の個数」に注意せよ．
- t と s の選び方によって P は変わる．例えば，$P = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ と選んでもよい．
- $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3$ は一次独立でなければならないので，決して $\boldsymbol{p}_i = \boldsymbol{0} (i = 1, 2, 3)$ とは選ばないようにせよ．$\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3$ が一次独立でなければ，P は正則にならない．
- ジョルダン細胞の個数が 2 個だと分かった時点で $J = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ と分かる．2 次のジョルダン細胞と 1 次のジョルダン細胞がそれぞれ 1 つずつになっているはずである．

==

■■■ 演習問題 ■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■

演習問題 10.5 行列 $A = \begin{bmatrix} -9 & -8 & 7 & 12 \\ -1 & -7 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ -2 & -4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ の固有多項式は $\Phi_A(x) = (x+5)^4$ であり，$(A + 5E_4)^2 = O$ である．このとき，次の問に答えよ．

(1) $\mathrm{rank}(A + 5E_4)$ を求めよ．

(2) 固有値 -5 のジョルダン細胞の個数を求めよ．

(3) 標数を求め，固有値 -5 の最大のジョルダン細胞の次数を求めよ．

(4) j 次ジョルダン細胞の個数を m_j とするとき，m_1 および m_2 を求めよ．

(5) A のジョルダン標準形 J を求めよ．