第11章

演習 11.2

```
\newtheorem{lemma}{補題}
任意の$x, y\in {\bf F}$に対して,
\begin{equation}
fl(x\odot y)=(x\odot y)(1+\delta) \qquad |\delta|\le u, \qquad
\odot=+,-,/,* . \label{model}
\end{equation}

\begin{lemma}
$|\delta_i|\le u, \ \rho_i=\pm 1(i=1,2,\cdots,n), \ nu<1$とする.
このとき,
\begin{equation}
\prod_{i=1}^n(1+\delta_i)^{\rho_i}=1+\theta_n
\end{equation}
が成り立つ. ただし,
$\displaystyle |\theta_n|\le\frac{nu}{1-nu}=:\gamma_n$
である. \label{lemma1}
\end{lemma}
モデル (\ref{model}) を用いて$n=2$まで計算すると,
\begin{eqnarray*}
\hat{s}_1&=&x_1(1+\delta_1) \qquad |\delta_1|\le u\\
\hat{s}_2&=&(\hat{s}_1+x_2)(1+\delta_2)=(x_1(1+\delta_1)+x_2)(1+\delta_2)
\qquad |\delta_2|\le u
\end{eqnarray*}
となります. ここで, 最悪の誤差を見積もるためには, 補題\ref{lemma1}より
$\delta=\delta_1=\delta_2$とし, $\gamma_2$を使って
過大評価すればよいことが分かるので,
$\delta=\delta_1=\cdots=\delta_n$として,
上記の計算を繰りかえすと,
\begin{equation}
\begin{split}
\hat{s}_n&=x_1(1+\delta)^n+x_2(1+\delta)^{n-1}+\cdots +
x_n(1+\delta)\\
&=x_1(1+\theta_n)+x_2(1+\theta_{n-1})+\cdots +x_n(1+\theta_1)
\end{split}\label{analysis1}
\end{equation}
となります. 従って, 後退誤差解析による結果 (\ref{analysis1}) より,
次の前進誤差評価を得ます。
\begin{equation}
|s_n-\hat{s}_n|\le \gamma_n\sum_{i=1}^n |x_i| \label{analysis2}
\end{equation}
```